***Тема: "Теория матричных игр"***

***Матричной игрой*** в математической [**теории игр**](https://function-x.ru/games_theory_examples.html) называется игра двух лиц с нулевой суммой, в которой в распоряжении каждого из них имеется конечное множество стратегий. Правила матричной игры определяет платёжная матрица, элементы которой - выигрыши первого игрока, которые являются также проигрышами второго игрока.

Матричная игра является антагонистической игрой. Первый игрок получает максимальный гарантированный (не зависящий от поведения второго игрока) выигрыш, равный цене игры, аналогично, второй игрок добивается минимального гарантированного проигрыша.

Под ***стратегией*** понимается совокупность правил (принципов), определяющих выбор варианта действий при каждом личном ходе игрока в зависимости от сложившейся ситуации.

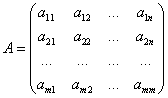
**Платёжная матрица, чистые стратегии, цена игры**

В матричной игре её правила определяет платёжная матрица.

Рассмотрим игру, в которой имеются два участника: первый игрок и второй игрок. Пусть в распоряжении первого игрока имеется m чистых стратегий, а в распоряжении второго игрока - n чистых стратегий. Поскольку рассматривается игра, естественно, что в этой игре есть выигрыши и есть проигрыши.

В платёжной матрице элементами являются числа, выражающие выигрыши и проигрыши игроков. Выигрыши и проигрыши могут выражаться в пунктах, количестве денег или в других единицах.

Составим платёжную матрицу:

.

Если первый игрок выбирает i-ю чистую стратегию, а второй игрок - j-ю чистую стратегию, то выигрыш первого игрока составит aij единиц, а проигрыш второго игрока - также aij единиц.

Так как aij + (- aij) = 0, то описанная игра является матричной **игрой с нулевой суммой.**

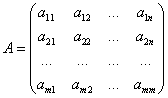
Простейшим примером матричной игры может служить бросание монеты. Правила игры следующие. Первый и второй игроки бросают монету и в результате выпадает "орёл" или "решка". Если одновременно выпали "орёл" и "орёл" или "решка" или "решка", то первый игрок выиграет одну единицу, а в других случаях он же проиграет одну единицу (второй игрок выиграет одну единицу). Такие же две стратегии и в распоряжении второго игрока. Соответствующая платёжная матрица будет следующей:

https://function-x.ru/games/g002.gif

Задача теории игр - определить выбор стратегии первого игрока, которая гарантировала бы ему максимальный средний выигрыш, а также выбор стратегии второго игрока, которая гарантировала бы ему максимальный средний проигрыш.

**Как происходит выбор стратегии в матричной игре?**

Вновь посмотрим на платёжную матрицу:



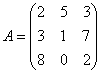
Сначала определим величину выигрыша первого игрока, если он использует i-ю чистую стратегию. Если первый игрок использует i-ю чистую стратегию, то логично предположить, что второй игрок будет использовать такую чистую стратегию, благодаря которой выигрыш первого игрока был бы минимальным. В свою очередь первый игрок будет использовать такую чистую стратегию, которая бы обеспечила ему максимальный выигрыш. Исходя из этих условий выигрыш первого игрока, который обозначим как v1, называется максиминным выигрышем или нижней ценой игры.

При решении задач на цену игры и определение стратегии для этих величин у первого игрока следует поступать следующим образом. Из каждой строки выписать значение минимального элемента и уже из них выбрать максимальный. Таким образом, выигрыш первого игрока будет максимальным из минимальных. Отсюда и название - максиминный выигрыш. Номер строки этого элемента и будет номером чистой стратегии, которую выбирает первый игрок.

Теперь определим величину проигрыша второго игрока, если он использует j-ю стратегию. В этом случае первый игрок использует такую свою чистую стратегию, при которой проигрыш второго игрока был бы максимальным. Второй игрок должен выбрать такую чистую стратегию, при которой его проигрыш был бы минимальным. Проигрыш второго игрока, который обозначим как v2, называется минимаксным проигрышем или верхней ценой игры.

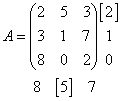
При решении задач на цену игры и определение стратегии для определения этих величин у второго игрока следует поступать следующим образом. Из каждого столбца выписать значение максимального элемента и уже из них выбрать минимальный. Таким образом, проигрыш второго игрока будет минимальным из максимальных. Отсюда и название - минимаксный выигрыш. Номер столбца этого элемента и будет номером чистой стратегии, которую выбирает второй игрок. Если второй игрок использует "минимакс", то независимо от выбора стратегии первым игроком, он проиграет не более v2 единиц.

**Пример 1.** Дана матричная игра с платёжной матрицей

.

Определить максиминную стратегию первого игрока, минимаксную стратегию второго игрока, нижнюю и верхнюю цену игры.

**Решение.** Справа от платёжной матрицы выпишем наименьшие элементы в её строках и отметим максимальный из них, а снизу от матрицы - наибольшие элементы в столбцах и выберем минимальный из них:



Наибольший из наименьших элементов строк - 2, это нижняя цена игры, ей соответствует первая строка, следовательно, максиминная стратегия первого игрока первая. Наименьший из наибольших элементов столбцов - 5, это верхняя цена игры, ей соответствует второй столбец, следовательно, минимаксная стратегия второго игрока - вторая.

Теперь, когда мы научились находить нижнюю и верхнюю цену игры, максиминную и минимаксную стратегии, пришло время научиться обозначать эти понятия формально.

Итак, гарантированный выигрыш первого игрока:

https://function-x.ru/games/g005.gif.

Первый игрок должен выбрать чистую стратегию, которая обеспечивала бы ему максимальный из минимальных выигрышей. Этот выигрыш (максимин) обозначается так:

https://function-x.ru/games/g006.gif.

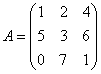
Первый игрок использует такую свою чистую стратегию, чтобы проигрыш второго игрока был максимальным. Этот проигрыш обозначается так:

https://function-x.ru/games/g007.gif.

Второй игрок должен выбрать свою чистую стратегию так, чтобы его проигрыш был минимальным. Этот проигрыш (минимакс) обозначается так:

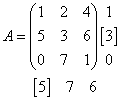
https://function-x.ru/games/g008.gif

**Пример 2.** Дана матричная игра с платёжной матрицей

.

Определить максиминную стратегию первого игрока, минимаксную стратегию второго игрока, нижнюю и верхнюю цену игры.

**Решение.** Справа от платёжной матрицы выпишем наименьшие элементы в её строках и отметим максимальный из них, а снизу от матрицы - наибольшие элементы в столбцах и выберем минимальный из них:



Наибольший из наименьших элементов строк - 3, это нижняя цена игры, ей соответствует вторая строка, следовательно, максиминная стратегия первого игрока вторая. Наименьший из наибольших элементов столбцов - 5, это верхняя цена игры, ей соответствует первый столбец, следовательно, минимаксная стратегия второго игрока - первая.

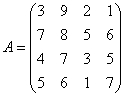
**Седловая точка в матричных играх**

Если верхняя и нижняя цена игры одинаковая, то считается, что матричная игра имеет седловую точку. Верно и обратное утверждение: если матричная игра имеет седловую точку, то верхняя и нижняя цены матричной игры одинаковы. Соответствующий элемент одновременно является наименьшим в строке и наибольшим в столбце и равен цене игры.

Таким образом, если https://function-x.ru/games/g011.gif, то https://function-x.ru/games/g012.gif - оптимальная чистая стратегия первого игрока, а https://function-x.ru/games/g013.gif - оптимальная чистая стратегия второго игрока. То есть равные между собой нижняя и верхняя цены игры достигаются на одной и той же паре стратегий.

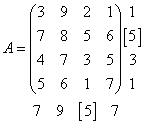
В этом случае ***матричная игра имеет решение в чистых стратегиях***.

**Пример 3.** Дана матричная игра с платёжной матрицей

.

Найти нижнюю и верхнюю цену игры. Имеет ли данная матричная игра седловую точку?

**Решение.** Справа от платёжной матрицы выпишем наименьшие элементы в её строках и отметим максимальный из них, а снизу от матрицы - наибольшие элементы в столбцах и выберем минимальный из них:



Нижняя цена игры совпадает с верхней ценой игры. Таким образом, цена игры равна 5. То есть https://function-x.ru/games/g016.gif. Цена игры равна значению седловой точки https://function-x.ru/games/g017.gif. Максиминная стратегия первого игрока - вторая чистая стратегия, а минимаксная стратегия второго игрока - третья чистая стратегия. Данная матричная игра имеет решение в чистых стратегиях.